

MAŁGORZATA GRACZYK, BRONISŁAW CERANKA

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych  
Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

## KATALOG PLANÓW WYBRANYCH UKŁADÓW DOŚWIADCZALNYCH

THE REVIEW OF SOME EXPERIMENTAL PLANS

### Abstrakt

**Wstęp.** W literaturze jest wiele prac poświęconych konstrukcji planów eksperymentów bazujących na układach wagowych. Stąd pojawiła się konieczność wyznaczenia katalogu układów doświadczalnych o określonych własnościach.

**Materiały i metody.** Badano własności planów eksperymentów utworzonych przy pomocy macierzy sprężynowych układów wagowych. Dodatkowo przyjęto założenie o nieparzystej liczbie obiektów eksperymentalnych. Podano przegląd metod konstrukcji układów.

**Wyniki.** Podanie klas układów o wybranych własnościach.

**Wnioski.** Uzyskane wyniki pozwoliły na stworzenie katalogu układów doświadczalnych konstruowanych na bazie sprężynowych układów wagowych.

**Słowa kluczowe:** plan eksperymentu, sprężynowy układ wagowy, układ doświadczalny

### Wprowadzenie

Przedmiotem pracy są zagadnienia dotyczące planowania doświadczeń, ze szczególnym uwzględnieniem doświadczeń agronomicznych. W teorii eksperymentu opierającej się na tworzeniu schematu doświadczeń, a następnie przeprowadzaniu analiz oraz formułowaniu wniosków, jednym z bardziej istotnych elementów jest sposób zaplanowania eksperymentu. Oczekuje się, aby plan doświadczenia uwzględniał informacje dotyczące materiału eksperymentalnego i warunków środowiska, jak również pozwalała na uzyskanie optymalnych własności statystycznych rozważanych układów. Aby zachować równowagę pomiędzy tymi oczekiwaniami wymagane jest, aby eksperyment był jak najbardziej efektywny. Zwiększenie efektywności, a tym samym zmniejszenie wariancji

błędu, zależy od przyjęcia odpowiednich założeń dotyczących błędów pomiarów i układu doświadczalnego. Na wielkość wariancji błędu składa się wiele przyczyn, m.in. pewne niedokładności wynikające z błędnego wykonywania pomiarów badanej cechy, problemy pojawiające się przy stosowaniu zabiegów agrotechnicznych czy też niejednorodność związana z jednostkami eksperymentalnymi (np. niejednorodna żyzność poletka). Cechy te powodują znaczną zmienność obserwacji, która może mieć istotny wpływ na wnioskowanie na podstawie uzyskanych pomiarów. A zatem eksperyment należy zaplanować i przeprowadzić w taki sposób, aby wpływ tych przyczyn ograniczyć, uwzględniając równocześnie cel i sposób przeprowadzenia badań. Ustalając zasady projektowania eksperymentu i dobór rodzaju wnioskowania statystycznego, dąży się do minimalizacji błędu doświadczalnego. Za najlepszą i najskuteczniejszą metodę uważana jest więc ta, która gwarantuje najmniejszą wariancję.

Doświadczenie przeprowadzamy na podstawie planu, którym jest macierz  $\mathbf{X}$ , zwana macierzą układu lub krótko – układem. Opisuje ona sposób rozmieszczenia jednostek eksperymentalnych. W prezentowanej pracy rozważamy sprężynowe układy wagowe. Są to układy, przy pomocy których wyznaczamy nieznanne miary pewnej liczby obiektów  $p$ , wykorzystując daną liczbę pomiarów  $n$ . Elementami macierzy układu  $\mathbf{X}$  są zera lub jedynki. Oznacza to, że w kolejnych pomiarach wybrany obiekt jest uwzględniany lub nie. Wynik każdego pomiaru jest kombinacją liniową nieznanymi miar  $p$  obiektów o współczynnikach tej kombinacji równych zero lub jeden. Celem badań jest wyznaczenie takiej macierzy planu doświadczenia, aby estymatory nieznanymi miar obiektów otrzymane na podstawie tej macierzy były najlepsze w sensie wybranego kryterium. Rozważamy w pracy układy, które są D-optymalne. Z matematycznego punktu oznacza to, że wyznacznik macierzy  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  jest minimalny. W praktyce iloczyn wariancji estymatorów nieznanymi miar obiektów jest możliwie najmniejszy.

Niniejsza praca jest podsumowaniem znanych w literaturze wyników dotyczących planowania eksperymentów na podstawie macierzy sprężynowych układów wagowych i stanowi podsumowanie fragmentu wiedzy dotyczącej tego tematu. Przyjmujemy założenie, że nie występują błędy systematyczne oraz że błędy pomiarów są nieskorelowane i mają jednakowe wariancje.

Celem rozważań jest podanie klas sprężynowych układów wagowych wraz z informacją o własnościach tych układów. Praca jest przeznaczona dla osób planujących eksperyment i ma stanowić wskazówkę, w jaki sposób można optymalnie zaplanować doświadczenie.

Badania dotyczą układów doświadczalnych, w których wyznaczamy nieznanne miary dla nieparzystej liczby obiektów.

## Material i metody

W literaturze rozważane są sprężynowe układy wagowe. Na podstawie pracy Hudel-sona i in. (1996) układ  $\mathbf{X}$  jest D-optymalny dla nieparzystej liczby obiektów, jeżeli  $\det(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = (p + 1) \left( \frac{(p+1)n}{4p} \right)^p$ . Warunek ten jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \frac{(p+1)n}{4p} (\mathbf{I}_p + \mathbf{1}_p \mathbf{1}'_p)$ . Nie dla każdej dowolnej pary: liczby obiektów  $p$  oraz liczby

pomiarów  $n$ , możemy wyznaczyć macierz spełniającą warunek optymalności. W takich klasach wyznaczamy układ  $\mathbf{X}_1$ , który jest D-optymalny dla  $p$  obiektów i  $n-s$  pomiarów. Do macierzy układu  $\mathbf{X}_1$  dodajemy odpowiednio 1, 2, 3 lub 4 wiersze  $\mathbf{x}_s$ -pomiaru. Następnie odpowiadamy na pytanie, w jaki sposób dodać kolejne  $s$  pomiarów,  $s = 1, 2, 3, 4$ , tak aby  $\det(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  był minimalny.

W pracach Katulskiej i Przybył (2007) oraz Ceranki i Graczyk (2014; 2017) rozważane były warunki określające istnienie takich układów oraz metody ich konstrukcji. Niech  $\mathbf{X}_1$  będzie macierzą sprzężynowego układu wagowego D-optymalnego w klasie dla  $p$  obiektów i  $n-s$  pomiarów. Jeżeli  $s = 1$ , to w pracy Katulskiej i Przybył (2007) był rozważany sprzężynowy układ wagowy w postaci:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{x}'_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Jeżeli  $s = 2$ , to Katulska i Przybył (2007) rozważały sprzężynowy układ wagowy w postaci:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Jeżeli  $s = 3$ , to w pracy Ceranki i Graczyk (2014) był konstruowany układ wagowy:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{x}'_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Jeżeli  $s = 4$ , to Ceranka i Graczyk (2017) badali własności układ wagowy w postaci:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{x}'_3 \\ \mathbf{x}'_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Układ  $\mathbf{X}$  w postaci ( $s$ ) jest D-optymalny wtedy i tylko wtedy, gdy

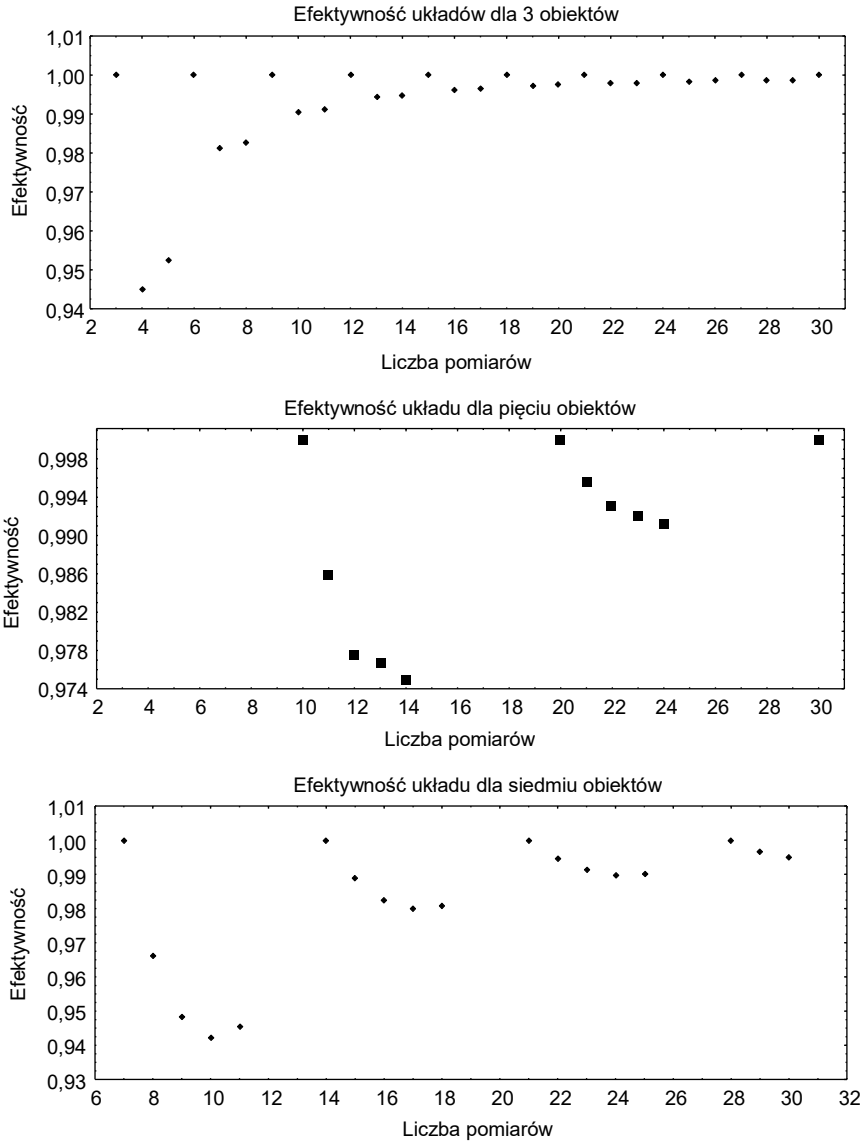
- (i)  $\mathbf{X}'_1\mathbf{X}_1 = \frac{(p+1)(n-s)}{4p}(\mathbf{I}_p + \mathbf{1}_p\mathbf{1}'_p)$
- (ii)  $\mathbf{x}'_h\mathbf{1}_p = \frac{p+1}{2}$
- (iii)  $\mathbf{x}'_h\mathbf{x}_{h'} = \begin{cases} \frac{p+1}{4}, & \text{jeżeli } p+1 \text{ jest podzielne przez } 4 \\ \frac{p+3}{4}, & \text{jeżeli } p+3 \text{ jest podzielne przez } 4 \end{cases}$

$h, h' = 1, 2, 3, 4, h \neq h', s = 1, 2, 3, 4.$



Tabela 1 – cd.

Liczba pomiarów <i>n</i>	Liczba obiektów <i>p</i>								
	3	5	7	9	11	13	15	17	19
5	0,9524	–	–	–	–	–	–	–	–
6	1	–	–	–	–	–	–	–	–
7	0,9812	–	1	–	–	–	–	–	–
8	0,9828	–	0,9661	–	–	–	–	–	–
9	1	–	0,9481	–	–	–	–	–	–
10	0,9906	1	0,9421	–	–	–	–	–	–
11	0,9912	0,9859	0,9456	–	1	–	–	–	–
12	1	0,9776	–	–	0,9763	–	–	–	–
13	0,9944	0,9768	–	–	0,9598	–	–	–	–
14	0,9946	0,9750	1	–	0,9492	–	–	–	–
15	1	–	0,9890	–	0,9435	–	1	–	–
16	0,9962	–	0,9825	–	–	–	0,9818	–	–
17	0,9964	–	0,9798	–	–	–	0,9678	–	–
18	1	–	0,9806	1	–	–	0,9572	–	–
19	0,9973	–	–	0,9910	–	–	0,9498	–	1
20	0,9974	1	–	0,9844	–	–	–	–	0,9853
21	1	0,9958	1	0,9803	–	–	–	–	0,9732
22	0,9980	0,9931	0,9946	0,9771	1	–	–	–	0,9635
23	0,9981	0,9921	0,9912	–	0,9924	–	–	–	0,9559
24	1	0,9913	0,9898	–	0,9868	–	–	–	–
25	0,9984	–	0,9901	–	0,9828	–	–	–	–
26	0,9985	–	–	–	0,9806	1	–	–	–
27	1	–	–	–	–	0,9935	–	–	–
28	0,9988	–	1	–	–	0,9882	–	–	–
29	0,9988	–	0,9968	–	–	0,9842	–	–	–
30	1	1	0,9948	–	–	0,9801	1	–	–



Rys. 1. Efektywność sprzężonych układów wagowych dla wybranej liczby obiektów

## Dyskusja

W pracy podane zostały klasy sprzężonych układów wagowych, w których można wyznaczyć układy D- optymalne albo wysoce D-efektywne. Wprawdzie nie dla każdej pary liczba obiektów i liczba pomiarów możemy wyznaczyć układ o własnościach

omówionych w pracy, jednak należy szukać dalszych możliwości konstrukcji tych układów w oparciu o znane macierze układów blokowych. Podkreślić należy, że wśród wielu przykładów wykorzystania układów wagowych znaleźć można pracę Banerjee (1975) traktującą o układach wagowych w medycynie, ekonomii i badaniach operacyjnych. Planowaniu eksperymentów w optyce poświęcone są prace Sloane'a i Harwita (1976) oraz Koukouvinosa i Seberry (1997). Spośród różnych zastosowań układów wagowych wyróżnić należy te, które związane są z doświadczalnictwem rolniczym (Ceranka i Katulska, 1987; 1989; Katulska, 1984). W pracy Graczyk (2013) opisana została możliwość zastosowania macierzy układu wagowego jako planu doświadczenia w zagadnieniach związanych z ochroną roślin, a w pracy Graczyk (2014) jako planu doświadczenia związanego z porównaniem wpływu NPK i różnych rodzajów masy organicznej zastosowanej pod przedplon na stan zdrowotny podstawy żdźbła rośliny następczej – jęczmienia jarego. Ewentualnych dalszych implementacji badanych układów można szukać wszędzie tam, gdzie plan doświadczenia bazuje na planie układu czynnikowego.

## Literatura

- Banerjee, K. S. (1975). *Weighing Designs for Chemistry, Medicine. Economics, Operations Research, Statistics*. New York: Marcel Dekker Inc..
- Bulutoglu, D. A., Ryan, K. J. (2009). D-optimal and near D-optimal 2k fractional factorial designs of resolution V. *J. Stat. Plan. Inference*, 139, 16–22. <https://doi.org/10.1016/j.jspi.2008.05.012>
- Ceranka, B., Graczyk, M. (2014). Regular D-optimal spring balance weighing designs: construction. *Acta UL, Folia Oecon.* 302, 111–125.
- Ceranka, B., Graczyk, M. (2017). Highly D-efficient weighing design and its construction. *Acta UL, Folia Oecon.*, 331, 143–151.
- Ceranka, B., Katulska, K. (1987). Zastosowanie teorii sprężynowych układów wagowych do analizy doświadczeń z mieszkankami. *Listy Biometryczne XXIV*, 17–26.
- Ceranka, B., Katulska, K. (1989). Application of the biased spring balance weighing theory to estimation of differences of line effects for legume content. *Biometrical Journal* 31, 103–110. <https://doi.org/10.1002/bimj.4710310113>
- Graczyk, M. (2013). Some applications on weighing designs. *Biometrical Letters*, 50, 15–26. <https://doi.org/10.2478/bile-2013-0014>
- Graczyk, M. (2014). Relations between randomized block designs and weighing designs in examples. *Colloquium Biometricum*, 44, 97–107.
- Hudelson, M., Klee, V., Larman, D. (1996). Largest j-simplices in d-cubes: Some relatives to the Hadamard determinant problem. *Linear Algebra Appl.*, 24, 519–598. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(95\)00541-2](https://doi.org/10.1016/0024-3795(95)00541-2)
- Katulska, K. (1984). Zastosowanie teorii układów wagowych do badania upraw paszowych i w geodezji. *Czternaste Colloquium Metodologiczne z Agrobiometrii*. Rzeszów: PAN, 195–208.
- Katulska, K., Przybył, K. (2007). On certain D-optimal spring balance weighing designs. *J. Stat. Theory Pract.*, 1, 393–404. <https://doi.org/10.1080/15598608.2007.10411848>
- Koukouvinos, Ch., Seberry, J. (1997). Weighing matrices and their applications. *J. Stat. Plan. Inference*, 62, 91–101. [https://doi.org/10.1016/S0378-3758\(96\)00172-3](https://doi.org/10.1016/S0378-3758(96)00172-3)
- Sloane, N. J. A., Harwit, M. (1976). Masks for Hadamard transform optics, and weighing designs. *Appl. Optics* 5, 107–114. <https://doi.org/10.1364/AO.15.000107>

## THE REVIEW OF SOME EXPERIMENTAL PLANS

### Abstract

**Background.** There are many paper in the literature dedicated to the construction methods of experimental plans based on weighing designs. Hence, the necessity to determine a catalogue of experimental designs with specific properties.

**Material and methods.** The properties of experimental designs formed by the matrix of spring balance weighing design were investigated. In addition, the assumption the number of objects is odd was taken. The review of construction methods was presented.

**Results.** The classes of the designs of considered properties were selected.

**Conclusions.** The obtained results allowed to create the a catalogue of experimental designs constructed on the basis of the spring balance weighing designs.

**Keywords:** experimental plan, spring balance weighing design, experimental design

*Adres do korespondencji – Corresponding address:*

*Małgorzata Graczyk, Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu, 60-637 Poznań, ul. Wojska Polskiego 28, Poland, e-mail: [malgorzata.graczyk@up.poznan.pl](mailto:malgorzata.graczyk@up.poznan.pl)*

*Zaakceptowano do opublikowania – Accepted for publication:*

*21.03.2019*

*Do cytowania – For citation:*

*Graczyk, M., Ceranka, B. (2019). Katalog planów wybranych układów doświadczalnych. *Nauka Przyr. Technol.*, 13, 2, 57–64. <http://dx.doi.org/10.17306/J.NPT.00272>*