

BOGDAN J. WOSIEWICZ, ZBIGNIEW WALCZAK

Katedra Mechaniki Budowli i Budownictwa Rolniczego
Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

MODELOWANIE CIENKICH, BARDZIEJ PRZEPUSZCZALNYCH PRZEWARSTWIEN W PŁASKICH PROBLEMACH FILTRACJI USTALONEJ PROSTYM ELEMENTEM LINIOWYM

Streszczenie. Do modelowania cienkich przewarstwien zdecydowanie bardziej przepuszczalnych niż otaczający je ośrodek gruntowy użyto prostego elementu liniowego „bez grubości”. Zależności dla tego elementu uzyskano wcześniej (WOSIEWICZ i WALCZAK 2005) przez kondensację, bezpośrednio z zależności dla elementu prostokątnego o czterech węzłach w jego wierzchołkach. Proponowany sposób modelowania przewarstwien zaimplementowano w wykorzystywanym przez autorów autorskim oprogramowaniu. Przeprowadzono wiele obliczeń testowych i porównawczych, które wykazały poprawność i efektywność takiego podejścia. W pracy przedstawiono wyniki obliczeń filtracji pod budowlą piętrzącą posadowioną na podłożu przepuszczalnym z cienkim przewarstwieniem ułożonym poziomo, na głębokości równej jednej czwartej długości budowli.

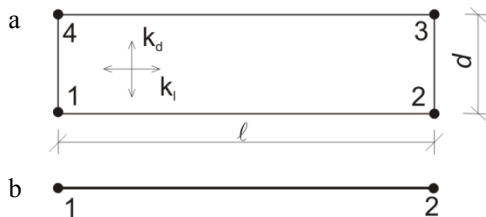
Słowa kluczowe: filtracja ustalona, metoda elementów skończonych, cienkie przewarstwienia, element liniowy

Wstęp

Analiza wielu problemów filtracyjnych, ze względu na złożoność zjawiska (związaną z geometrią obszaru, anizotropią czy niejednorodnością właściwości fizycznych, nieciągłością warunków brzegowych itp.), możliwa jest praktycznie tylko z wykorzystaniem metod numerycznych. Najczęściej wykorzystuje się metodę elementów skończonych (ZIENKIEWICZ i TAYLOR 2000, SROKA i IN. 2004). Na etapie budowania modelu numerycznego w takich rozwiązaniach można napotkać spore trudności (WOSIEWICZ 1996), dotyczące między innymi występowania i konieczności dyskretyzacji cienkich przewarstwien, soczewek, ekranów częściowo przepuszczalnych itp.

Wyróżnia się zasadniczo dwie różne sytuacje. Cienkie przewarstwienie może być słabiej przepuszczalne niż otaczający je ośrodek gruntowy i utrudniać ruch wód gruntowych. W sytuacji odwrotnej przewarstwienie jest zdecydowanie lepiej przepuszczalne. W takim przewarstwieniu dominuje zazwyczaj ruch wzdłuż jego długości, gdyż wysokości piezometryczne na przeciwnych brzegach są w przybliżeniu równe sobie, a gradient wysokości piezometrycznych skierowany jest wzdłuż przewarstwienia. Jeśli dodatkowo przewarstwienie leży wzdłuż kierunku ruchu wody (lub pod niewielkim kątem), może stanowić uprzywilejowaną drogę filtracji.

W pracy WOSIEWICZA i WALCZAKA (2005) do modelowania cienkich przewarstwień zaproponowano dwa proste elementy skończone (prostokątny i liniowy – rys. 1). Zostały wyprowadzone odpowiednie zależności metody elementów skończonych dla każdego z nich i podane w sposób jawny macierze przepuszczalności. Szerzej przedyskutowano tam sytuację, w której występujące cienkie przewarstwienie (soczewka) jest zdecydowanie słabiej przepuszczalne niż otaczający je ośrodek gruntowy. Wskazano dla takiej sytuacji uproszczoną macierz przepuszczalności dla prostego, prostokątnego elementu skończonego z węzłami w wierzchołkach oraz zaimplementowano zaproponowane rozwiązanie we własnym oprogramowaniu (por. SROKA i IN. 2004). Wykonano szereg obliczeń z wykorzystaniem tego oprogramowania, które wykazały przydatność takiego sposobu do modelowania przewarstwienia. Wykazano, że modelowanie cienkich, nawet bardzo cienkich przewarstwień zaproponowanym elementem prostokątnym znacznie ułatwia proces dyskretyzacji zadania, a uzyskiwane rezultaty obliczeń – przy mniejszej liczbie węzłów i elementów w stosunku do tradycyjnego sposobu modelowania przewarstwienia za pomocą standardowych trójkątnych elementów skończonych z węzłami w wierzchołkach (nawet o 1/3) – zapewniają dokładność wyników. W cytowanej pracy nie przytoczono jednak analiz i przykładów obliczeniowych z zastosowaniem elementu liniowego do modelowania cienkich przewarstwień zdecydowanie lepiej przepuszczalnych niż otaczający je ośrodek gruntowy. Artykuł ten stanowi w tym sensie rozszerzenie i uzupełnienie przytoczonej publikacji (WOSIEWICZ i WALCZAK 2005). Warto wskazać, że cienkie przewarstwienia, słabiej przepuszczalne niż otaczający je ośrodek gruntowy, modelować można także z wykorzystaniem warunku brzegowego trzeciego rodzaju, zadawanego na wewnętrznym brzegu obszaru filtracji (WALCZAK 2006, WALCZAK i WOSIEWICZ 2010).



Rys. 1. Element prostokątny i prosty element liniowy

Fig. 1. Rectangular and simple linear element

Material i metody

Element liniowy do modelowania cienkich, bardziej przepuszczalnych przewarstwień

Ponieważ grubość cienkiego przewarstwienia d jest znacznie mniejsza niż jego długość L , przyjęto (WOSIEWICZ i WALCZAK 2005), że samo przewarstwienie można modelować elementem liniowym „bez grubości” (rys. 1 b), wprowadzającym bezpośrednio w wygenerowaną siatkę, wskazując tylko węzły boków elementów trójkątnych, wzdłuż których przebiega przewarstwienie. Właściwości filtracyjne i geometria samego przewarstwienia uwzględniane będą tylko w charakterystyce elementu. Przepuszczalność takiego elementu charakteryzować można jednym współczynnikiem filtracji k_1 wzdłuż przewarstwienia. Ze względu na charakter przewarstwienia (jego dużo mniejszą grubość w stosunku do długości) przyjąć można, że w przewarstwieniu będzie dominować ruch wzdłuż niego (wysokości piezometryczne na przeciwnych brzegach, w węzłach leżących naprzeciwko siebie, nie będą się praktycznie różnić). Zakładając dodatkowo stałą grubość przewarstwienia w obrębie elementu liniowego oraz jednorodność właściwości filtracyjnych w przewarstwieniu $k_1 = \text{const.}$ $\cap d = \text{const.}$, wyrazy macierzy przepuszczalności elementu liniowego wyrazić można zależnością (WOSIEWICZ i WALCZAK 2005):

$$g^{ij} = k_1 d \int_0^1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

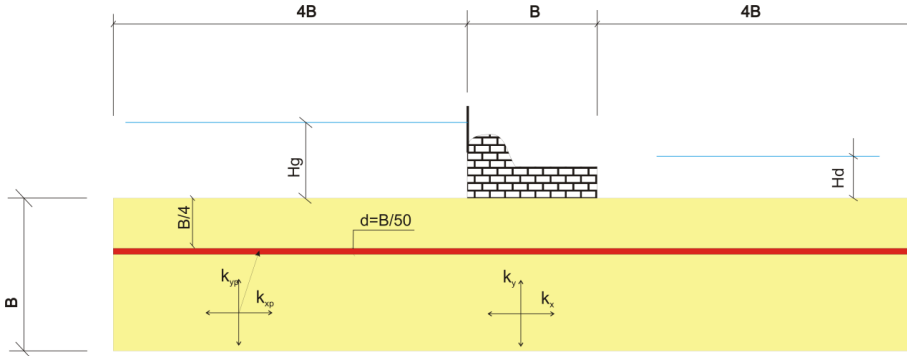
Przyjmując najprostsze, liniowe funkcje aproksymujące i wykonując odpowiednie obliczenia, uzyskamy macierz przepuszczalności elementu.

$$\mathbf{g} = \frac{k_1 d}{1} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Wprowadzenie takiego elementu liniowego do oprogramowania, w sposób zaproponowany przez autorów, powoduje niewielkie zmiany w globalnej macierzy przepuszczalności \mathbf{G} , a szerokość pasma nie ulega zmianie. Implementacja takiego sposobu modelowania w istniejącym oprogramowaniu jest zatem stosunkowo prosta.

Filtracja pod budowlą piętrzącą z poziomo zalegającym przewarstwieniem

Przeanalizowano szczegółowo płaską, ustaloną filtrację pod budowlą piętrzącą o długości $B = 10$ m (rys. 2). Założono, że budowla posadowiona jest na izotropowym ośrodku gruntowym o miąższości także równej B . W podłożu znajduje się cienkie, poziome przewarstwienie o miąższości $B/50$, znacznie bardziej przepuszczalne niż otaczający je ośrodek gruntowy, położone na głębokości $B/4$ pod fundamentem. Wykonano wiele analiz numerycznych dla kilku wariantów przepuszczalności przewarstwienia oraz poziomów piętrzenia. Dla wykazania poprawności zaproponowanego sposobu

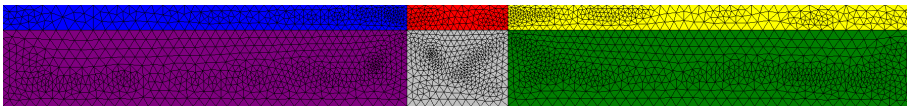


Rys. 2. Schemat obliczeniowy

Fig. 2. Calculation scheme

modelowania przeprowadzono także stosowne obliczenia sprawdzające metodą elementów skończonych, z pełnym wymodelowaniem przewarstwienia. Analizę wykonano odpowiednio zmodyfikowanym, autorskim oprogramowaniem (por. SROKA i IN. 2004).

Do dyskretyzacji obszar filtracji podzielono na 6 podobszarów o jednakowych właściwościach filtracyjnych (charakteryzowanych takim samym współczynnikiem filtracji $k_x = k_y = 10^{-5}$ m/s, bez uwzględnienia cienkiego przewarstwienia jako oddzielnego podobszaru). Granice matematyczne obszaru filtracji przyjęto oddalone o $4B$ przed i za budowlą piętrzącą. Wygenerowano siatkę 4430 elementów i 2317 węzłów (rys. 3). Następnie w obszarze filtracji wprowadzono cienką warstwę znacznie bardziej przepuszczalną niż otaczający ją ośrodek gruntu, modelując ją za pomocą 98 opisanych elementów liniowych, nałożonych na wygenerowaną siatkę. Właściwości filtracyjne oraz geometria (szerokość) cienkiego przewarstwienia uwzględnione zostały tylko w opisie zastosowanych elementów.



Rys. 3. Siatka podziału na elementy

Fig. 3. Finite element mesh

Wykonano obliczenia dla kilku wariantów przepuszczalności przewarstwienia (opisywanego stosunkiem współczynników filtracji k_p/k odpowiednio w przewarstwieniu oraz w otaczającym je ośrodku gruntu) oraz dla kilku poziomów piętrzenia. W analizowanych zadaniach dla każdego z poziomów piętrzenia $\Delta H = B/8$; $B/4$ oraz $B/2$ wykonano analizę dla trzech wariantów przepuszczalności przewarstwienia $k_p/k = 2, 32, 128$. Dodatkowo dla piętrzenia $\Delta H = B/4$ wykonano również obliczenia dla przepuszczalności $k_p/k = 4, 8, 16$ oraz 64 . W poszczególnych zadaniach analizowano wydatek całkowity Q_c pod budowlą piętrzącą oraz wydatek przez samo przewarstwienie Q_p . Otrzymane wyniki (w metrach sześciennych na dobę na metr szerokości budowli) zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Wydatki całkowite pod budowlą piętrzącą Q_c i przez samo przewarstwienie Q_p dla analizowanych zadań

Table 1. Total flow rate under weir Q_c and interbeddings flow rate Q_p for analysed calculations

Rozwiązanie z elementami liniowymi The solution of the linear elements				Rozwiązanie tylko elementami trójkątnymi Solution only triangular elements		
				bez przewarstwienia without interbedding		z uwzględnieniem przewarstwienia with interbedding
	kp/k	Q_c (m ² /d)	Q_p (m ² /d)	Q_c (m ² /d)	Q_c (m ² /d)	Q_p (m ² /d)
$\Delta H = B/8$	2	0,607	0,027	0,587		
	32	0,865	0,362			
	128	1,47	1,07			
$\Delta H = B/4$	2	1,21	0,0534	1,17	1,19	0,0538
	4	1,25	0,105			
	8	1,33	0,206		1,31	0,207
	16	1,47	0,393		1,45	0,396
	32	1,73	0,723			
	64	2,18	1,27			
	128	2,94	2,15		2,94	2,17
$\Delta H = B/2$	2	2,43	0,107	2,35		
	32	3,46	1,44			
	128	5,87	4,29			

Uwaga: wydatki podano z dokładnością do trzech miejsc znaczących w metrach sześciennych na dobę na metr szerokości budowli.

Note: the total discharge are given accurate to three significant digits in cubic meters per 24 h per meter width of the building.

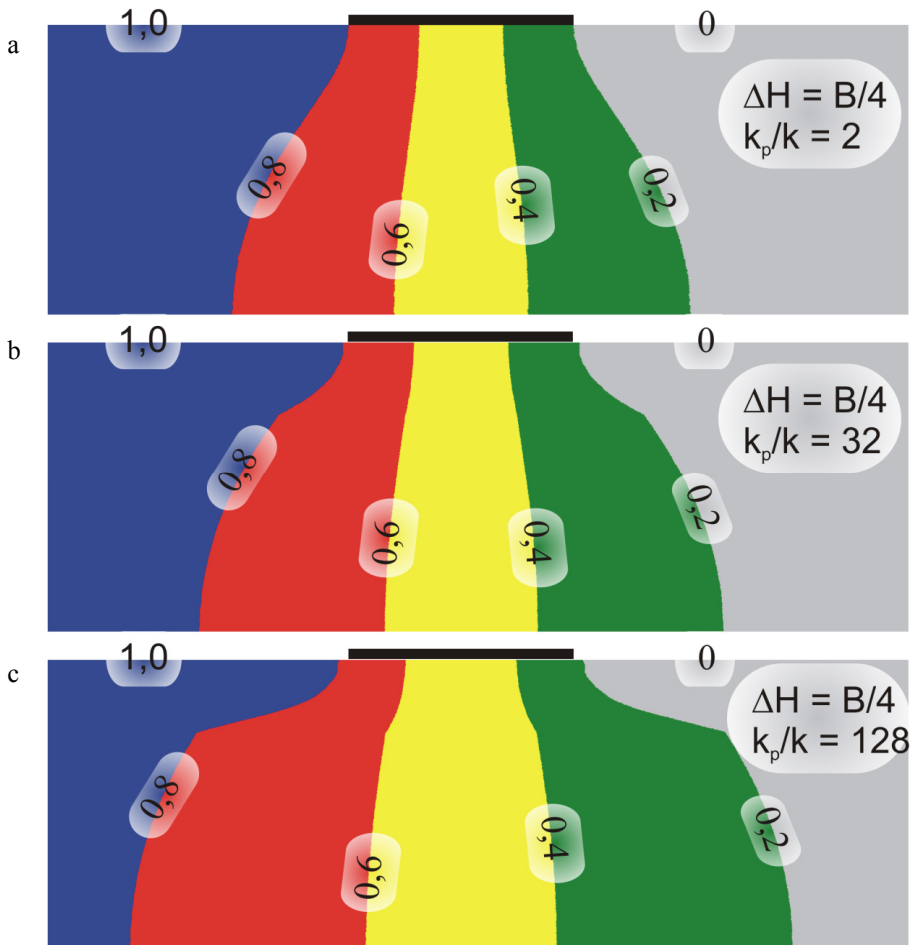
Dla analogicznego problemu filtracyjnego wygenerowano siatkę podziału na elementy, gdzie obszar cienkiego przewarstwienia modelowany był klasycznie za pomocą trójkątnych elementów skończonych z węzłami w wierzchołkach. Wygenerowano w ten sposób siatkę zawierającą 6631 elementów i 3446 węzłów. Samo przewarstwienie modelowane było przez 444 elementy skończone. Konieczna liczba węzłów (niewiadomych) zwiększyła się zatem o około 1,5 raza. Porównano otrzymane wydatki i przeanalizowano również rozkłady wysokości piezometrycznych oraz gradientów w obszarze filtracji.

Przeprowadzone obliczenia filtracji pod analizowaną budowlą piętrzącą z uwzględnieniem dwóch różnych sposobów modelowania cienkiego przewarstwienia (zapropnowanymi elementami liniowymi oraz klasycznie – za pomocą elementów trójkątnych z wydzieleniem podobszaru cienkiego przewarstwienia) nie wykazały znaczących różnic w wydatkach, w rozkładach wysokości piezometrycznych oraz gradientów dla poszczególnych poziomów piętrzenia i przepuszczalności samego przewarstwienia.

Wyniki

Uzyskane z przeprowadzonych obliczeń wybrane rezultaty przedstawiono w tabeli 1 oraz zilustrowano na kolejnych rysunkach (od 4 do 9).

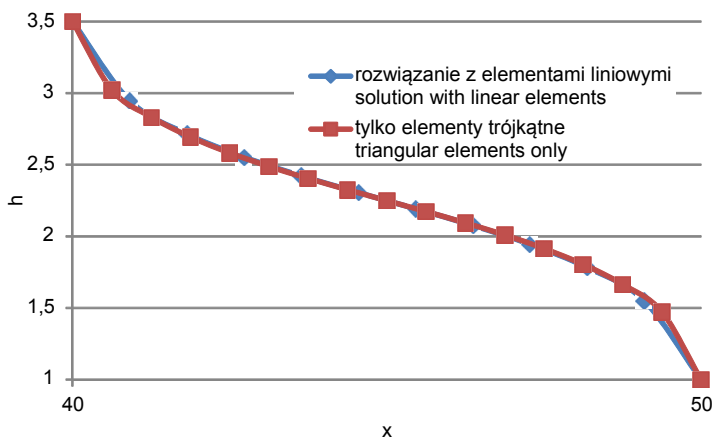
Zauważyć można zwiększający się wraz ze wzrostem przepuszczalności wpływ przewarstwienia na rozkład wysokości piezometrycznych. Ilustruje to rysunek 4, wykonany dla $\Delta H = B/4$ i trzech wartości współczynnika k_p/k . Na tym rysunku warstwiec opisano wielkościami bezwymiarowymi $(h - H_d)/\Delta H$, gdzie H_d jest wysokością piezometryczną odpowiadającą wodzie dolnej, a ΔH jest wysokością piętrzenia. Dla przewarstwienia o dwukrotnie większej przepuszczalności niż otaczający je grunt wpływ tego



Rys. 4. Rozkłady wysokości piezometrycznych w podłożu budowli dla $\Delta H = B/4$ i różnych wartości stosunku k_p/k

Fig. 4. Piezometric head distribution in soil under a weir for $\Delta H = B/4$ for different values of ratio k_p/k

przewarstwienia jest niewielki, ale jeśli przewarstwienie jest znacznie bardziej przepuszczalne (rzędu 100 razy), jego wpływ na rozkłady wysokości piezometrycznych jest już znaczny, co ilustruje rysunek 4. Porównano też rozkład wysokości piezometrycznych pod samą budowlą piętrzącą. Uzyskano bardzo dobrą zgodność między analizowanymi rozwiązaniami. Wyniki obliczeń dla piętrzenia $\Delta H = B/4$ oraz przepuszczalności $k_p/k = 128$ zostały zilustrowane na rysunku 5.

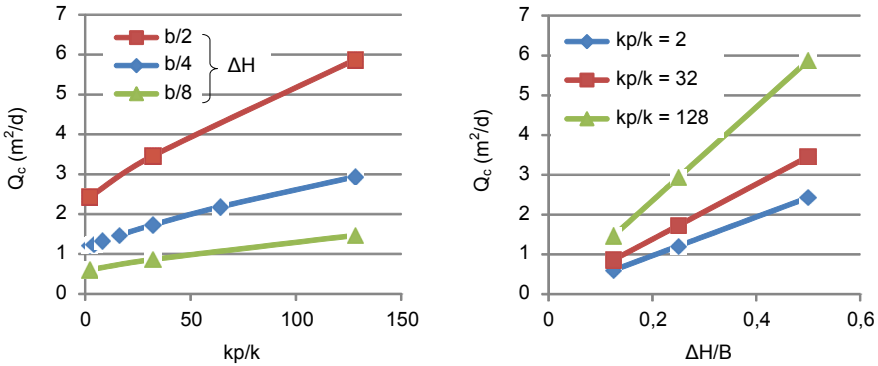


Rys. 5. Porównanie rozkładu wysokości piezometrycznych pod budowlą piętrzącą dla rozwiązania tylko elementami trójkątnymi oraz modelując przewarstwienie proponowanymi elementami liniowymi

Fig. 5. Comparison of piezometric head distribution under a weir for solution based upon triangular elements and for modelling of thin interbeddings by using simple linear element

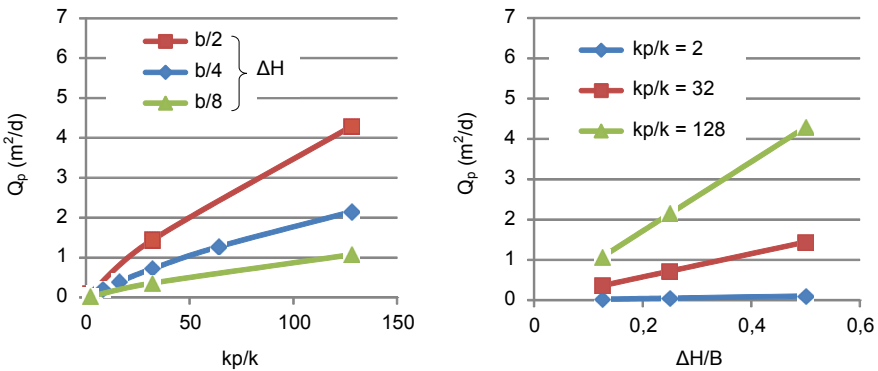
Wykonano obliczenia dla porównywanego piętrzenia $\Delta H = B/4$, dla wybranych przepuszczalności przewarstwienia modelując je klasycznie za pomocą zbioru trójkątnych elementów skończonych. Uzyskane wydatki całkowite oraz przez samo przewarstwienie podano także w tabeli 1. Wyniki wskazują na bardzo dużą zgodność rozwiązań, a różnica w wyznaczonych wydatkach nie przekracza 2%.

Porównując całkowite wydatki pod budowlą piętrzącą, zestawione w tabeli 1, zauważyć można, że wraz ze wzrostem przepuszczalności przewarstwienia wydatek całkowity rośnie w stosunku do wydatku bez cienkiego przewarstwienia odpowiednio o kilka procent dla $k_p/k = 2$, a nawet do prawie 250% dla $k_p/k = 128$. Na rysunkach 6 i 7 przedstawiono wydatki całkowite oraz wydatki przez przewarstwienie, odpowiednio w zależności od przepuszczalności przewarstwienia lub wysokości piętrzenia. Zauważyć można, że wraz ze wzrostem przepuszczalności przewarstwienia udział procentowy przewarstwienia w wydatku całkowitym rośnie istotnie od około 4% dla $k_p/k = 2$ do nawet 73% dla $k_p/k = 128$. Ilustruje to dobrze sporządzona dla $\Delta H = B/4$ rysunek 8, ale praktycznie identyczna dla innych poziomów piętrzenia. Wydatki Q_c i Q_p są zatem proporcjonalne do wysokości piętrzenia ΔH .



Rys. 6. Wydatki całkowite w zależności od przepuszczalności przewarstwienia oraz poziomu piętrzenia

Fig. 6. Total flow rates as a function of interbeddings permeability and up stream water level

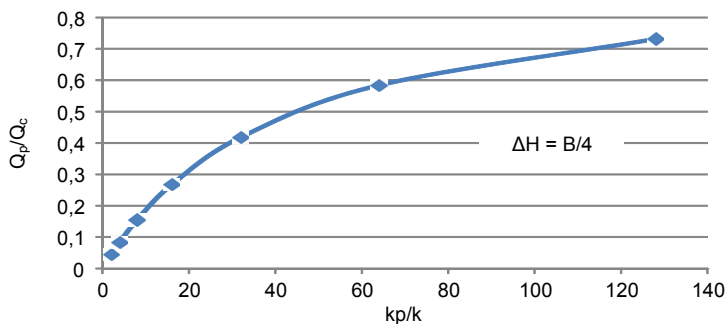


Rys. 7. Wydatki przez przewarstwienie

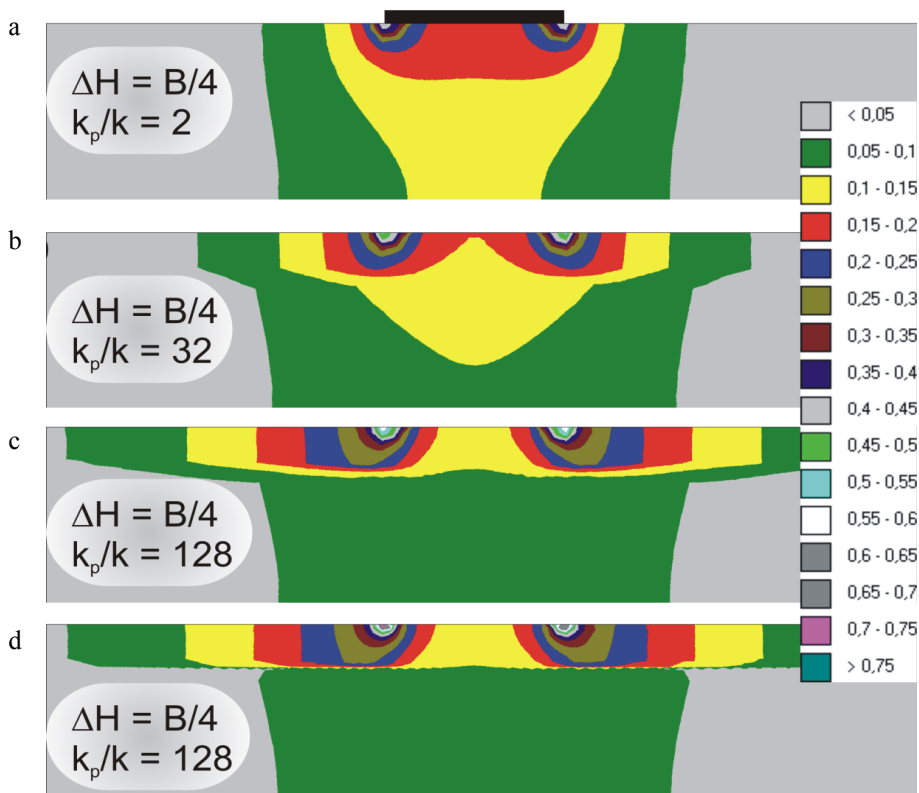
Fig. 7. Flow rates in interbeddings

Przeanalizowano szczegółowo również rozkłady gradientów wokół budowli piętrzącej. Na rysunku 9 (a, b, c) przedstawiono rozkłady gradientów dla wybranych przepuszczalności przewarstwienia, dla piętrzenia $\Delta H = B/4$ dla k_p/k równego odpowiednio 2, 32 i 128. Zauważono, że ze wzrostem przepuszczalności przewarstwienia maleje zasięg wysokich gradientów, a jednocześnie gradienty maksymalne, w pobliżu budowli, rosną z około 0,46 do 0,60. Na rysunku 9 c oraz 9 d porównano natomiast rozkłady gradientów wokół budowli dla rozwiązania odpowiednio z elementami liniowymi oraz dla rozwiązania z przewarstwieniem modelowanym klasycznie. Pewne różnice w gradientach w obrębie przewarstwienia mogą wynikać z innego sposobu modelowania samego przewarstwienia, jednak sam rozkład gradientów wokół budowli, ponad przewarstwieniem, jest praktycznie taki sam. Różnica w gradientie maksymalnym między poszczególnymi rozwiązaniami wynosi około 15%, odpowiednio $I_{\max} = 0,60$ dla rozwiązania z proponowanym elementem liniowym i $I_{\max} = 0,72$ dla rozwiązania klasycznego.

Wosiewicz B.J., Walczak Z., 2011. Modelowanie cienkich, bardziej przepuszczalnych przewarstwień w płaskich problemach filtracji ustalonej prostym elementem liniowym. Nauka Przyr. Technol. 5, 5, #100.



Rys. 8. Zależność stosunku wydatku przez przewarstwienie do wydatku całkowitego Q_p/Q_c od stosunku przepuszczalności przewarstwienia i podłoża k_p/k . Ratio of interbeddings flow rate and total flow rate Q_p/Q_c as a function of interbeddings permeability and ground permeability ratio



Rys. 9. Przykładowe rozkład gradientów w podłożu dla rozwiązania z elementami liniowymi (a, b, c) i tylko elementami trójkątnymi (d)

Fig. 9. Examples of gradient distributions in soil under a weir for solution based upon simple linear elements (a, b, c) and for solution based upon triangular elements (d)

Podsumowanie

Analizowano problem modelowania cienkich przewarstwień, soczewek lepiej przepuszczalnych niż otaczający je ośrodek gruntowy za pomocą zaproponowanego wcześniej (WOSIEWICZ i WALCZAK 2005) elementu liniowego „bez grubości”. Przyjęto, że samo cienkie przewarstwienie nie będzie wydzielone jako podobszar, a dyskretyzacja wykonana będzie tak, jakby przewarstwienie nie istniało. Trzeba wówczas jedynie spełnić warunek, aby brzegi trójkątnych elementów skończonych w obrębie fizycznego położenia przewarstwienia przebiegały wzdłuż tego przewarstwienia (w jego osi). Przyjęto też, że geometria przewarstwienia oraz jego właściwości filtracyjne uwzględniane będą wyłącznie przez stosowane charakterystyki elementu liniowego. Zaproponowaną technikę modelowania zaimplementowano we własnym profesjonalnym oprogramowaniu. Wykazano, że uzyskiwane rezultaty obliczeń dla rzeczywiście cienkich przewarstwień są praktycznie takie same, jak przy innym sposobie modelowania (gęsty podział na elementy trójkątne w przewarstwieniu oraz wokół niego). Zaproponowane podejście do modelowania przewarstwień lepiej przepuszczalnych niż otaczający je ośrodek gruntowy ma wiele zalet. Samo przewarstwienie nie jest w sposób jawny dyskretyzowane, co ułatwia podział obszaru filtracji na elementy, umożliwiając jednocześnie uzyskanie poprawnego rozwiązania przy znacznym zmniejszeniu liczby niewiadomych. Nie jest bowiem konieczne duże zagęszczanie elementów w celu dokładnego odwzorowania przewarstwienia.

Pamiętać należy, że zaproponowany element liniowy może być stosowany tylko przy cienkich przewarstwiach lepiej przepuszczalnych niż otaczający je ośrodek gruntowy. Zastosowanie tego elementu wymaga na ogół pewnych modyfikacji oprogramowania, ale są one niewielkie. Nie zaburzają symetrii macierzy układu równań \mathbf{G} , a szerokość pasma tej macierzy również pozostaje bez zmian.

Literatura

- SROKA Z., WALCZAK W., WOSIEWICZ B.J., 2004. Analiza ustalonych przepływów wód gruntowych metodą elementów skończonych. Oprogramowanie inżynierskie. Wyd. AR, Poznań.
- WALCZAK Z., 2006. Numeryczny model filtracji pod budowlą piętrzącą w złożonych warunkach gruntowych. Maszynopis. Katedra Mechaniki Budowli i Budownictwa Rolniczego UP, Poznań.
- WALCZAK Z., WOSIEWICZ B.J., w przygotowaniu. Modelling of thin interbeddings in flat filtration problems defined by a third-type boundary condition.
- WOSIEWICZ B.J., WALCZAK Z., 2005. Modelowanie cienkich przewarstwień w problemach płaskiej filtracji ustalonej. Roczn. AR Pozn. 365, Melior. Inż. Środ. 26: 523-534.
- ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.R., 2000. The finite element method. T. 1. The basis. Butterworth-Heinemann, Oxford.

MODELLING OF THIN INTERBEDDINGS WITH HIGHER PERMEABILITY PROPERTIES IN TWO-DIMENSIONAL STEADY STATE GROUNDWATER FLOW BY USING SIMPLE LINEAR ELEMENT

Summary. “No thickness” simple linear element were used to model thin interbeddings with higher permeability properties than the rest of enclosed ground. Relationships for the element were obtained early (WOSIEWICZ i WALCZAK 2005) by condensation, from equations for four nodes rectangular element. Proposed procedure of modeling of interbeddings were implemented in computer program created by the authors. Set of tests and comparative calculations have been carried out. The calculations proved correctness and efficiency of proposed procedure. Results of calculations of groundwater flow under weir located on permeable ground with thin horizontal interbeddings situated on depth equal to one fourth of length of the weir have been presented in the paper

Key words: steady seepage, finite element method, thin interbeddings, linear element

Adres do korespondencji – Corresponding address:

Bogdan J. Wosiewicz, Katedra Mechaniki Budowli i Budownictwa Rolniczego, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu, ul. Piątkowska 94 E, 60-649 Poznań, Poland, e-mail: bjw@up.poznan.pl

Zaakceptowano do druku – Accepted for print:

13.06.2011

Do cytowania – For citation:

*Wosiewicz B.J., Walczak Z., 2011. Modelowanie cienkich, bardziej przepuszczalnych przewarstwień w płaskich problemach filtracji ustalonej prostym elementem liniowym. *Nauka Przyr. Technol.* 5, 5, #100.*