

MATEUSZ HÄMMERLING, PAWEŁ ZAWADZKI, BOGUSŁAW PRZEDWOJSKI

Katedra Budownictwa Wodnego  
Akademia Rolnicza im. Augusta Cieszkowskiego w Poznaniu

## ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W DOLNYM STANOWISKU BUDOWLI PIĘTRZĄCEJ

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono dwuwymiarowy model matematyczny rozkładu prędkości w dolnym stanowisku budowli piętrzącej, poniżej poziomego umocnienia. Jako metodę rozwiązania układu równań różniczkowych zaproponowano metodę różnic skończonych. Identyfikację parametrów modelu wykonano za pomocą miar statystycznych oraz wyników pomiarów zrealizowanych na modelu fizycznym.

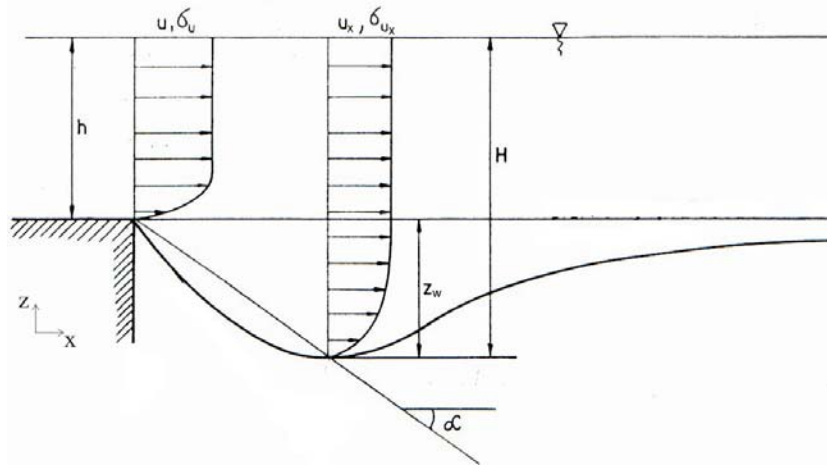
**Słowa kluczowe:** rozmycie miejscowe, rozkład prędkości, dwuwymiarowy model hydrodynamiczny

### Wstęp

Po przegrodzeniu rzeki i spiętrzeniu jej wód budowlą hydrotechniczną w jej dolnym stanowisku zwiększa się energia kinetyczna strumienia wody. Zastosowanie odpowiednich umocnień ochrania dno i brzegi koryta przed zniszczeniem, a przede wszystkim odsuwa procesy erozyjne od bezpośredniego sąsiedztwa fundamentów. Mimo zastosowania takiej ochrony wartość energii kinetycznej pozostaje znacznie większa od energii w cieku naturalnym, co w połączeniu z odkładaniem rumowiska powyżej przegrody może spowodować wzmożoną erozję gruntu poniżej budowli upustowej.

Na rysunku 1 przedstawiono schemat miejscowego rozmycia dna (wyboju), powstającego poniżej końca poziomego umocnienia. Pokazano tu półprostą, która swój początek ma na krawędzi umocnienia i przechodzi przez punkt wyznaczający maksymalną głębokość rozmycia. Tworzy z poziomem kąt  $\alpha$ , który odpowiada granicznemu kątowi rozplywu strumienia.

Proces rozmycia miejscowego dna w gruntach niespoistych można podzielić na cztery charakterystyczne fazy. **Faza I** charakteryzuje się powstaniem obniżenia dna na odcinku poniżej umocnień w wyniku krótkotrwałego (minuty) oddziaływania przepływu o prędkościach większych lub równych prędkościom rozmywającym. Dochodzi tu do najintensywniejszego rozmywania i pogłębiania wyboju.



Rys. 1. Szkic rozmycia lokalnego poniżej poziomego umocnienia.  $h$ ,  $H$  – głębokość wody,  $z_w$  – głębokość rozmycia,  $\alpha$  – graniczny kąt rozplywu strumienia swobodnego,  $u$  – prędkość w punkcie pomiaru uśredniona w czasie,  $\sigma_u$  – odchylenie standardowe pulsacji prędkości na granicy swobodnego strumienia

Fig. 1. Definition sketch of local scour below horizontal apron:  $h$ ,  $H$  – flow depth,  $z_w$  – scour hole depth,  $\alpha$  – angle of jet discharge,  $u$  – time average flow-velocity,  $\sigma_u$  – standard deviations of flow-velocity

**Faza II** charakteryzuje się powstaniem walca dennego między końcem umocnienia a przekrojem maksymalnego rozmycia, który determinuje rozkład prędkości średnich w powstającym wyboju. Walec ten pojawia się wskutek oderwania warstwy przycienionej nieumocnionego dna w wyniku jego obniżenia.

Wyniki doświadczeń POPOVEJ (1970, 1975) wykazały, że jeżeli na końcu umocnienia występuje mała intensywność turbulencji ( $\sigma\sqrt{u} \leq 0,2$ ), to walec denny kończy się w odległości sześciu swoich wysokości od końca umocnienia, co odpowiada wartości kąta  $\alpha = 9-10$  (miąższość walca minimalna). Jeżeli turbulencja na końcu umocnienia wzrasta, to głębokość rozmycia również rośnie.

**Faza III** charakteryzuje się wydłużaniem wyboju w kierunku głównego przepływu wody, z jednoczesnym ustabilizowaniem początkowej i maksymalnej jego głębokości (rys. 1). Poniżej maksymalnego rozmycia dno staje się poziome i ulega podniesieniu. Wraz ze wzrostem głębokości rozmycia zmniejszają się prędkości przy dnie.

**Faza IV** charakteryzuje się ustabilizowaniem zmienności wymiarów wyboju. Rozkład prędkości średnich w wyboju jest determinowany przez tworzący się w dole rozmycia walec denny. Największe pulsacje prędkości, gwałtowne zmiany kierunku przepływu oraz średnie prędkości przy dnie równe zero występują w przekroju, w którym wybój osiąga maksymalną głębokość.

Znajomość rozkładu prędkości ma istotne znaczenie praktyczne w analizie tematu erozji dna poniżej budowli, a szczególnie w prognozowaniu wielkości i tempa rozmycia.

## Material i metody

### Model matematyczny

Badania rozkładu prędkości prowadzono na modelu matematycznym, w układzie płaskim, odpowiadającym dolnemu stanowisku budowli piętrzącej. Założono, że po pewnym czasie przepływu wody i procesie rozmycia dna cieku poniżej końca umocnienia się obniży – powstanie lokalne rozmycie o znanych wymiarach. Przyjęto, że proces rozmycia dna jest w fazie III, kiedy maksymalna głębokość rozmycia się ustabilizuje.

Przedmiotem badań było określenie rozkładu prędkości w węzłach siatki metody różnic skończonych, nałożonej na przyjęte obszary rozwiązania – ograniczone wymiarami wyboju.

Modelowano przepływ czystej wody, bez uwzględnienia ruchu rumowiska. Model matematyczny zakłada, że przez koryto o stałej szerokości powierzchni swobodnej ( $B = \text{const}$ ) przepływać będzie stała ilość ( $Q = \text{const}$ ) cieczy nieściśliwej ( $\rho = \text{const}$ ) oraz lepkiej.

W opisie matematycznym zjawiska wykorzystano układ równań składający się z równania ciągłości i równania dynamicznego, zapisanego dla ustalonego przepływu wody. Zaproponowano dwa rozwinięcia równania dynamicznego i dlatego modele rozwiązujące powyższe układy równań są oznaczone \*.1. oraz \*.2. (HÄMMERLING 2006).

**Model matematyczny \*.1.** Układ równań zaproponowany przez SAWICKIEGO (1998) dostosowano do potrzeb własnych – utworzono model \*.1. Dynamiczny współczynnik lepkości molekularnej  $\mu$ , dyspersyjny współczynnik de Saint-Venanta  $\alpha_d$  oraz gęstość wody  $\rho$  przyjęto jako stałe. Do obliczeń przyjęto  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 0,0015674 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$ ,  $\alpha_d = 1,0$ . Ponieważ w modelu głębokość wody  $H$  jest zmienna, dlatego zaistniała konieczność zastosowania ciśnienia uśrednionego w przestrzeni  $\bar{p}$  zamiast ciśnienia zewnętrznego  $p_0$ . Do własnego modelu matematycznego wprowadzono następujące równanie ciągłości:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

gdzie:

$u_x, u_z$  – prędkości przepływu wody odpowiednio w kierunku osi  $x$  lub  $z$  układu współrzędnych (m/s).

Zmodyfikowane ze względu na przyjęte stałe równanie dynamiczne SAWICKIEGO (1998) przyjęło postać:

$$u_x \frac{\alpha_d \partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho B} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho B} + \frac{2(\mu + \tilde{\mu}_T)}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{(\mu + \tilde{\mu}_T)}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \quad (2)$$

gdzie:

$\tau_{bx}$  – naprężenia boczne (styczne do granicy obszaru),

$\mu_T$  – dynamiczny współczynnik lepkości turbulentnej uśredniony względem zmiennych przestrzennych ( $\text{N}\cdot\text{s/m}^2$ ).

**Model matematyczny x.2.x.x.** Inni autorzy, np. YOUNG i IN. (2005) opisują podobne zjawiska układem równań, gdzie w równaniu dynamicznym możemy znaleźć dodat-

kowy człon  $u_z \frac{\alpha_d \partial u_x}{\partial z}$ . W modelu \*.2. zastosowano takie same założenia, jak w modelu \*.2. W wyniku powyższej analizy uzyskano następujący układ równań, składający się z równania ciągłości (takiego samego jak w modelu \*.1.) oraz następującego równania dynamicznego:

$$u_x \frac{\alpha_d \partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\alpha_d \partial u_x}{\partial z} = - \frac{1}{\rho B} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho B} + \frac{2(\mu + \tilde{\mu}_T)}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{(\mu + \tilde{\mu}_T)}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \quad (3)$$

Wszystkie symbole i oznaczenia jak w poprzednim podrozdziale.

### Obszary rozwiązania i warunki brzegowe

Na podstawie geometrii dolnego stanowiska modeli fizycznych, przedstawionych w pracach SIDORUKA (2001) i OLEJNICZAKA (2006), stworzono odpowiednio wariant B i C siatki różnicowej. Badania Sidoruka dotyczyły tylko przepływu czystej wody, a doświadczenia prowadzone na modelu fizycznym przez Olejniczaka uwzględniały grunt, ruch rumowiska i proces erozji.

Do rozwiązania układu równań modelu matematycznego zastosowano metodę różnic skończonych. Wymaga to zastąpienia równania różniczkowego odpowiednim równaniem różnicowym. Otrzymano w ten sposób nieliniowy układ równań algebraicznych dla określonego obszaru rozwiązania, na które nałożono siatki różnicowe, zamieniające obszar ciągły w obszar dyskretny i umożliwiające numeryczne rozwiązanie problemu.

Rozwiązanie zaproponowanego układu równań wymaga przyjęcia warunków brzegowych. Na każdy brzeg obszaru nałożono warunek brzegowy I lub III rodzaju. Warunek brzegowy I rodzaju jest związany ze znaną wartością funkcji. W przedstawionych modelach warunek ten uzyskano dla brzegu wejściowego i wyjściowego z pomiarów prędkości średnich na modelu fizycznym, przy dnie zaś założono, że obie składowe prędkości są równe zeru.

Warunek brzegowy III rodzaju jest związany ze znaną wartością funkcji oraz jej pochodną. Zadano go na powierzchni swobodnej zwierciadła wody (górnym brzeg), stosując warunek kinematyczny  $\frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$   $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$  oraz zadając w tych punktach  $u_z = 0$  (HÄMMERLING 2006).

### Równania różnicowe metody różnic skończonych (MRS) i rozwiązywanie układu równań

W obliczeniach zastosowano następujące formuły aproksymujące (SZYMKIEWICZ 2000):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{xi,j}}{\partial x} &= \frac{u_{xi,j} - u_{xi,j-1}}{\Delta x} \\
\frac{\partial u_{xi,j}}{\partial z} &= \frac{u_{xi,j} - u_{xi,j-1}}{\Delta z} \\
\frac{\partial u_{zi,j}}{\partial z} &= \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta z} \\
\frac{\partial^2 u_{xi,j}}{\partial x^2} &= \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta x^2} \\
\frac{\partial^2 u_{xi,j}}{\partial z^2} &= \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta z^2}
\end{aligned} \tag{4}$$

Przykładowy układ równań różnicowych MRS dla węzła 18 siatki C przedstawia się następująco:

$$\frac{u_{x18,18} - u_{x18,12}}{\Delta x} + \frac{u_{z18,18} - u_{z18,17}}{\Delta z} = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
u_{x18,18} \frac{\alpha_d (u_{x18,18} - u_{x18,12})}{\Delta x} &= -\frac{1}{\rho B} \left( \frac{(p_{atm} + \rho g (H_{x18,18} - z_{x18,18})) - (p_{atm} + \rho g (H_{x18,12} - z_{x18,12}))}{\Delta x} \right) - \\
-\frac{\tau_{bx}}{\rho B} + \frac{2(\mu + \mu_T)}{\rho} \frac{u_{x18,12} - 2u_{x18,18} + u_{x18,25}}{\Delta x^2} &+ \frac{(\mu + \mu_T)}{\rho} \left( \frac{\frac{u_{x18,18} - u_{x18,17}}{\Delta z} - \frac{u_{x18,19} - u_{x18,18}}{\Delta z_1}}{\frac{\Delta z + \Delta z_1}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{6}$$

Każdy z punktów siatki różnicowej opisano układem równań (5) i (6). Dla ich łatwiejszego rozwiązania rozdzielono równania dynamiczne i ciągłości. Zabieg ten spowodował stworzenie dwóch macierzy.

Otrzymany nieliniowy układ równań dynamicznych doprowadzono do postaci liniowej, wykorzystując prędkości z poprzedniej iteracji. Można zatem zapisać:

$$-\text{człon } \tau_{bx}^n = \frac{2\rho g}{C_b^2} \sqrt{u_x^{2(n-1)} + u_z^{2(n-1)}} u_x^{(n-1)} \tag{7}$$

– w członie  $\alpha_d u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$  zastąpiono prędkości  $u_{xi,j}$  przez prędkości z poprzedniej iteracji

$$\alpha_d u_x^{n-1} \frac{\partial u_x^n}{\partial x}$$

Utworzone w ten sposób układy równań wielu zmiennych rozwiązano w arkuszu kalkulacyjnym Microsoft Excel m.in. z wykorzystaniem funkcji macierzy odwrotnej.

## Wyniki badań

### Ocena zgodności wielkości obliczonych z pomierzonymi

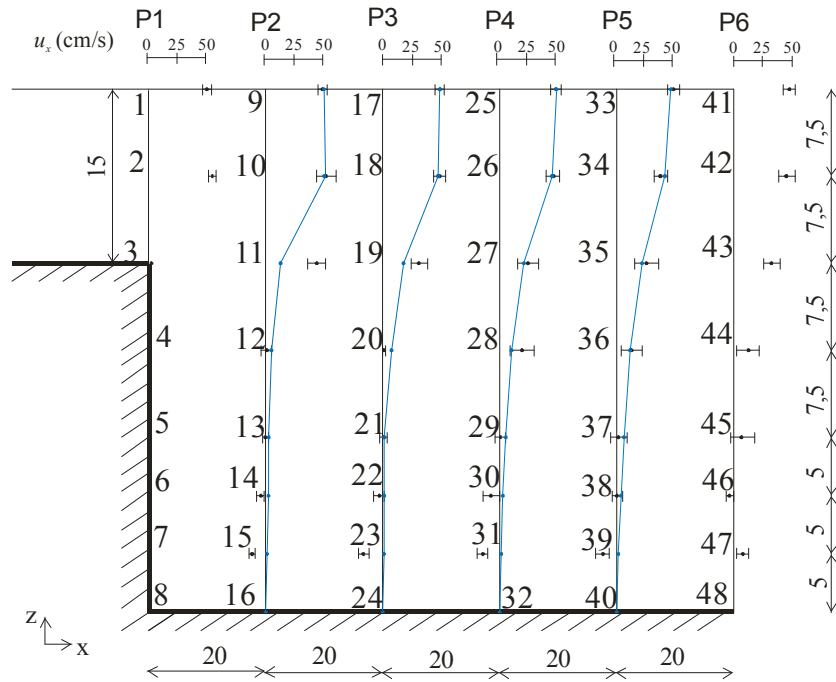
Punktem wyjścia analizy wyników jest porównanie wartości pomierzonych z wartościami obliczonymi. Model matematyczny opisuje zjawiska w sposób przybliżony. Będzie on lepiej dopasowany do konkretnych warunków, jeżeli różnice między wartościami pomierzonymi i obliczonymi będą jak najmniejsze.

Do analizy wyników wykorzystano znormalizowany błąd średni kwadratowy  $NRMSE$ , błąd średni kwadratowy  $RMSE$ , a także kwadratowy współczynnik korelacji krzywoliniowej  $R^2$  (MCCLAVE i DIETRICH 1998).

### Siatka różnicowa B

Na rysunku 2 przedstawiono uśrednione w czasie rozkłady prędkości składowej poziomej  $u_x$ , obliczone z wykorzystaniem modelu B.1. Wymiary geometryczne podano w centymetrach.

Analiza prędkości średnich, a także identyfikacja parametrów modelu B.1 wykazała zależności podobne jak w modelu B.2. Różnice między prędkościami policzonymi wariantami tych modeli są niewielkie.



Rys. 2. Model B.1. Rozkład prędkości składowej  $u_x$ , pomierzona prędkość  $u_x$ , modelowana prędkość –

Fig. 2. B.1 model. Distribution of  $u_x$  velocity component, velocity measure  $u_x$ , velocity modeling –

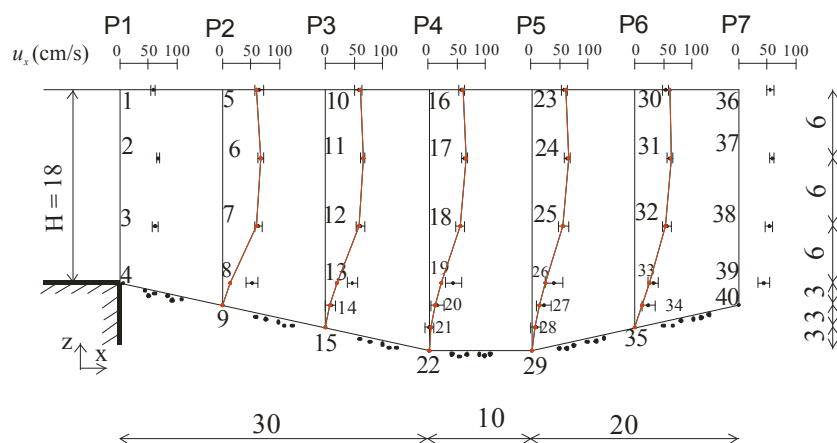
Prędkości obliczone modelem B.1 są bardziej zbliżone do wyników pomiarów niż obliczone modelem B.2. Model B.1 według kwadratowego współczynnika korelacji krzywoliniowej  $R^2$  w pionach hydrometrycznych P3 ( $R^2 = 0,83$ ) i P4 ( $R^2 = 0,83$ ) wykazuje znaczącą zależność między pomiarem a modelem. Odwrotność znormalizowanego błędu średniego kwadratowego  $NRMSE$  określa prawdopodobieństwo, z jakim model osiąga wyniki zgodne z pomiarami. W pionie hydrometrycznym P3 prawdopodobieństwo to wynosi 62% ( $NRMSE = 0,38$ ), a w pionie P4 jest równe 61% ( $NRMSE = 0,39$ ).

Analizując wszystkie pionowe hydrometryczne, stwierdzono znaczącą zależność między pomiarem a modelem ( $R^2 = 0,93$ ) oraz 64-procentowe prawdopodobieństwo uzyskania wyników zgodnych z pomiarami ( $NRMSE = 0,36$ ).

Dla wszystkich wariantów modelu matematycznego narysowane profile pionowe prędkości średnich przy zwierciadle wody mieszczą się w granicach wyznaczonych odchyłań standardowych, przy dnie zaś warunek ten nie zostaje spełniony za każdym razem.

### Siatka różnicowa C

Na rysunku 3 przedstawiono uśrednione w czasie rozkłady prędkości składowej poziomej  $u_x$ , obliczone z wykorzystaniem modelu C.1. Wymiary geometryczne podano w centymetrach.



Rys. 3. Model C.1. Rozkład prędkości składowej  $u_x$ , pomierzona prędkość  $|u|$ , modelowana prędkość –

Fig. 3. C.1 model. Distribution of  $u_x$  velocity component, velocity measure  $|u|$ , velocity modeling –

Analiza prędkości średnich, a także identyfikacja parametrów modelu C.1 wykazała podobne zależności, jak w modelu C.2. Różnice między prędkościami policzonymi wariantami tych modeli są niewielkie.

Prędkości obliczone modelem C.1 są bardziej zbliżone do wyników pomiarów niż obliczone modelem C.2. Model C.1 według kwadratowego współczynnika korelacji krzywoliniowej  $R^2$  w pionie hydrometrycznym P3 ( $R^2 = 0,82$ ) wykazuje znaczącą za-

leżność między pomiarem i modelem, a w pionach P4 ( $R^2 = 0,90$ ) i P5 ( $R^2 = 0,94$ ) model ten charakteryzuje się silną zależnością między pomiarem i modelem. W pionach hydrometrycznych: P3, P4 i P5 prawdopodobieństwo, że wyniki uzyskane z wykorzystaniem modelu C.1. są zgodne z pomierzonymi wartościami prędkości, wynosi odpowiednio: 60% ( $NRMSE = 0,40$ ), 70% ( $NRMSE = 0,30$ ) oraz 77% ( $NRMSE = 0,23$ ).

Analizując wszystkie pionowe hydrometryczne, stwierdzono znaczącą zależność między pomiarem a modelem ( $R^2 = 0,88$ ) oraz 65-procentowe prawdopodobieństwo uzyskania wyników zgodnych z pomiarami ( $NRMSE = 0,35$ ).

Dla wszystkich wariantów modelu matematycznego narysowane profile pionowe prędkości średnich przy zwierciadle wody mieszczą się w granicach wyznaczonych odchyłań standardowych, przy dnie zaś warunek ten nie zostaje spełniony za każdym razem.

## Podsumowanie

Zaproponowane warianty modelu matematycznego rozkładu prędkości w dolnym stanowisku budowli piętrzącej wykazują znaczną lub silną zależność między wynikami pomiarów a obliczonymi profilami prędkości. Sposób rozwiązania układu równań różniczkowych (metoda różnic skończonych, ograniczona liczba węzłów siatki, oddziaływanie warunków brzegowych) nie pozwoliły na odtworzenie walca dennego, powstającego po oderwaniu się warstwy przyściennej poniżej umocnienia. Są więc konieczne dalsze prace, pozwalające rozszerzyć obszar stosowania modelu.

## Literatura

- HÄMMERLING M., 2006. Modelowanie matematyczne rozkładu prędkości w dolnym stanowisku budowli upustowej. Maszyn. Pr. magist. Kat. Bud. Wodn. AR, Poznań.
- MCCLAVE J., DIETRICH F., 1998. Statistic. Collier MacMillan Publ., Dellen Publ. San Francisco.
- OLEJNICZAK A., 2006. Badania modelowe rozkładu prędkości w dolnym stanowisku budowli upustowej. Maszyn. Pr. dypl. Kat. Bud. Wodn. AR, Poznań.
- SAWICKI J., 1998. Przepływy ze swobodną powierzchnią. PWN, Warszawa.
- SIDORUK J.A., 2001. Badania modelowe rozkładu prędkości w dolnym stanowisku budowli upustowej i w korycie rozmywalnym. AR, Poznań.
- ZAWADZKI P., 1998. Lokalna erozja dna cieków w gruntach różnoziarnistych. Maszyn. Pr. dokt. AR, Poznań.

## FLOW-VELOCITY DISTRIBUTION BELOW A HYDRAULIC STRUCTURE

**Summary.** A two-dimensional mathematical model of vertical and longitudinal velocity below a horizontal solid apron of hydraulic structures is presented. Continuity and dynamic equations for steady flow in mathematical description of phenomenon were used. Partial-differential equations were solved using the finite-differences method. Model parameters were identified by means

Hämmerling M., Zawadzki P., Przedwojski B., 2007. Rozkład prędkości w dolnym stanowisku budowli piętrzącej. *Nauka Przym. Technol.* 1, 2, #23.

---

of trial-and-error procedure on the basis of laboratory test data. Proposed model variants of mathematical flow-velocity distribution below hydraulic structure present meaningful or strong dependence between values of flow-velocity computed using mathematical model and measured on physical model.

**Key words:** local scouring, velocity distribution, 2-D hydrodynamic model

*Adres do korespondencji – Corresponding address:*

*Mateusz Hämmerling, Katedra Budownictwa Wodnego, Akademia Rolnicza im. Augusta Cieszkowskiego w Poznaniu, ul. Wojska Polskiego 73A, 60-625 Poznań, Poland, e-mail: mhammer@au.poznan.pl*

*Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 10.05.2007*

*Do cytowania – For citation: Hämmerling M., Zawadzki P., Przedwojski B., 2007. Rozkład prędkości w dolnym stanowisku budowli piętrzącej. *Nauka Przym. Technol.* 1, 2, #23.*